第27卷 第5期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 5
2010年10月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0947-04

模糊命题演算系统的一个新的等价形式*

马巧云[1,2]， 吴洪博[2]

(1- 西安文理学院数学系，西安 710065； 2- 陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062)

摘　要: 在模糊逻辑系统 $\mathcal{L}^*$ 中，$P\wedge Q$ 是 $\neg(\neg P\vee\neg Q)$ 的简写，连接词 $\wedge$ 与连接词 $\neg, \vee, \rightarrow$ 的关系应由 $\mathcal{L}^*$ 中的公理体系决定。本文通过在 $\mathcal{L}^*$ 中增加适当公理使得连接词 $\wedge$ 与 $\neg, \vee, \rightarrow$ 具备所需的特殊关系，得到的主要结论是：在 $\mathcal{L}^*$ 中增加公理 $L^*9_b:(((A\rightarrow C)\vee(B\rightarrow C))\rightarrow(A\wedge B\rightarrow C))$，同时放弃约定"$P\wedge Q$ 是 $\neg(\neg P\vee\neg Q)$ 的简写"，所得的系统 $\mathcal{L}_0^*$ 与 $\mathcal{L}^*$ 等价。

关键词: 模糊逻辑；命题演算；系统 $\mathcal{L}^*$；等价形式

分类号: **AMS**(2000) O3B52　　**中图分类号**: O141.1　　**文献标识码**: A

1　引言

模糊推理是模糊逻辑在工程技术中的成功应用，而模糊推理的基础是模糊命题演算系统[1,2]。在文献 [1] 中，王国俊教授以 $\neg, \vee, \rightarrow$ 为基本连结词建立了模糊命题演算系统 $\mathcal{L}^*$，该系统 $\mathcal{L}^*$ 在模糊命题演算系统中具有独特而重要的地位。此后系统 $\mathcal{L}^*$ 经过文献 [3,4] 的简化，其公理体系已经趋于完善[2,3]。文献 [2,3] 在系统 $\mathcal{L}^*$ 中仍保留了"约定"：$P\wedge Q$ 是 $\neg(\neg P\vee\neg Q)$ 的简写，而从该"约定"的使用效果和代换定理分析，这一"约定"实际上等价于在系统 $\mathcal{L}^*$ 中增加了两个公理：$(P\wedge Q)\rightarrow\neg(\neg P\vee\neg Q)$, $\neg(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow(P\wedge Q)$。本文研究的结果是：在 $\mathcal{L}^*$ 系统中增加公理 $L_0^*9_b:((A\rightarrow C)\vee(B\rightarrow C))\rightarrow(A\wedge B\rightarrow C)$，同时放弃该"约定"，所得系统 $\mathcal{L}_0^*$ 与系统 $\mathcal{L}^*$ 等价。从而进一步完善了模糊命题演算系统 $\mathcal{L}^*$。由于篇幅所限，系统 $\mathcal{L}^*$ 的定义和本文未加定义的符号，请参见文献 [2,3]。

2　模糊命题演算系统 $\mathcal{L}_0^*$ 及其性质

定义 2.1　由以下的公式集 $F(S)$，公理 $L_0^*1-L_0^*10$，推理规则 MP 组成的系统称为模糊命题演算系统 $\mathcal{L}_0^*$。

1)　设 $S=\{P_1,P_2,\cdots\}$ 是可数无穷集，$\neg$ 是一元算子，$\vee, \rightarrow, \wedge$ 是二元算子。$F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg, \vee, \rightarrow, \wedge)$ 型自由代数，$F(S)$ 中的元素叫公式。

2)　$F(S)$ 中具有以下各种形式的公式为系统 $\mathcal{L}_0^*$ 中的公理。

L_0^*1:　$A\rightarrow(B\rightarrow A\wedge B)$;　　L_0^*2:　$(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$;

L_0^*3:　$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(B\rightarrow(A\rightarrow C))$;

L_0^*4:　$(B\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$;

L_0^*5:　$A\rightarrow\neg\neg A$;　　L_0^*6:　$A\rightarrow(A\vee B)$;　　L_0^*7:　$(A\vee B)\rightarrow(B\vee A)$;

L_0^*8:　$((A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C))\rightarrow((A\vee B)\rightarrow C)$;

$L_0^*9_a$:　$((A\wedge B)\rightarrow C)\rightarrow((A\rightarrow C)\vee(B\rightarrow C))$;

收稿日期: 2009-10-28.　**作者简介**: 马巧云 (1973年9月生)，女，讲师. 研究方向：非经典数理逻辑.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10871121)；西安文理学院 2008 年中青年专业技术人员科研资助项目 (kyc200819).

$L_0^*9_b$: $((A\to C)\vee(B\to C))\to((A\wedge B)\to C)$;

L_0^*10: $(A\to B)\vee((A\to B)\to(\neg A\vee B))$。

3) 系统$\mathcal{L}_0^*$中的推理规则MP为：由A, $A\to B$推得B。

定义2.2 设$\Gamma\subseteq F(S)$, $A\in F(S)$，系统$\mathcal{L}_0^*$中从Γ到A的推演是$F(S)$中的公式的有限序列$A_1,A_2,\cdots,A_n,(A_n=A)$，对任意的$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，或$A_k\in\Gamma$，或$A_k$是系统$\mathcal{L}_0^*$中的公理，或存在于$i,j\in\{1,2,\cdots,k-1\}$，使得$A_k$是由$A_i$, A_j通过MP规则而得到的公式，并称A是系统$\mathcal{L}_0^*$中的Γ-结论，记作$\Gamma\vdash A$。

当$\Gamma=\emptyset$时，则称A为系统$\mathcal{L}_0^*$中的定理，记作$\vdash A$，并称从Γ到A的推演为定理的证明。

引理2.1 设$\{A,B,C\}\subseteq F(S)$，则

1) $\{A,B\}\vdash A\wedge B$； 2) (HS规则) $\{A\to B,B\to C\}\vdash A\to C$； 3) $\vdash\neg\neg A\to A$；

4) $\vdash A\to A$； 5) $\{A\}\vdash A\vee B$； 6) $\vdash(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$。

证明 由公理及MP规则直接可证，略。

引理2.2 1) $\vdash(A\wedge B)\to A$； 2) $\vdash(A\wedge B)\to B$。

证明 1)

1° $(A\to A)\vee(B\to A)\to((A\wedge B)\to A)$; $L_0^*9_b$

2° $A\to A$; 引理2.1 4)

3° $(A\to A)\vee(B\to A)$; 2°, 引理2.1 5)

4° $(A\wedge B)\to A$; 1°, 3°, MP

2) 类似1)的证明，略。

引理2.3 1) $\vdash(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$； 2) $\vdash(\neg A\to B)\to(\neg B\to A)$。

证明 1)

1° $\neg\neg A\to A$; 引理2.1 3)

2° $(\neg\neg A\to A)\to((A\to\neg B)\to(\neg\neg A\to\neg B))$; 引理2.1 6)

3° $(A\to\neg B)\to(\neg\neg A\to\neg B)$; 1°, 2°, MP

4° $(\neg\neg A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$; L_0^*2

5° $(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$。 3°, 4°, HS

2) 类似1)的证明，略。

引理2.4 $\vdash(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$。

证明 由公理，引理2.3及MP, HS规则直接可证，略。

引理2.5 1) $\vdash A\to(\top\to A)$； 2) $\{\top\}\vdash(\top\to A)\to A$。

证明 1)

1° $A\to(\top\to(A\wedge\top))$; L_0^*1

2° $(A\wedge\top)\to A$; 引理2.2

3° $((A\wedge\top)\to A)\to((\top\to(A\wedge\top)))\to(\top\to A)$; L_0^*4

4° $(\top\to(A\wedge\top))\to(\top\to A)$; 2°, 3°, MP

5° $((\top\to(A\wedge\top))\to(\top\to A))$
$\quad\to((A\to(\top\to(A\wedge\top)))\to(A\to(\top\to A)))$; L_0^*4

6° $(A\to(\top\to(A\wedge\top)))\to(A\to(\top\to A))$; 4°, 5°, MP

7° $A\to(\top\to A)$。 1°, 6°, MP

2) 类似1)的证明，略。

引理2.6 1) $\vdash\neg A\to(A\to\neg\top)$； 2) $\{\top\}\vdash(A\to\neg\top)\to\neg A$。

证明 1)

1° $\neg A \to (\top \to \neg A)$;　　引理 2.5

2° $(\top \to \neg A) \to (A \to \neg\top)$;　　引理 2.3

3° $\neg A \to (A \to \neg\top)$。　　1°, 2°, HS

2) 类似 1) 的证明，略。

引理 2.7 $\{A \to B, C \to D\} \vdash (A \vee C) \to (B \vee D)$。

证明

1° $A \to B$;　　假设

2° $B \to (B \vee D)$;　　L_0^*6

3° $A \to (B \vee D)$;　　1°, 2°, HS

4° $C \to D$;　　假设

5° $D \to (D \vee B)$;　　L_0^*6

6° $(D \vee B) \to (B \vee D)$;　　L_0^*7

7° $C \to (B \vee D)$;　　4°, 5°, 7°, HS

8° $(A \to (B \vee D)) \wedge (C \to (B \vee D))$;　　3°, 8°, 引理 2.1 1)

9° $(A \to (B \vee D)) \wedge (C \to (B \vee D)) \to ((A \vee C) \to (B \vee D))$;　　L_0^*8

10° $(A \vee C) \to (B \vee D)$。　　9°, 10°, MP

引理 2.8 $\vdash (A \wedge B) \to \neg(\neg A \vee \neg B)$。

证明

1° $(A \to \neg\top) \vee (B \to \neg\top) \to ((A \wedge B) \to \neg\top)$;　　$L_0^*9_b$

2° $\top$ 为 $A \to (B \to (A \wedge B))$;　　L_0^*1

3° $\neg A \to (A \to \neg\top)$, $\neg B \to (B \to \neg\top)$;　　2°, 引理 2.6

4° $(\neg A \vee \neg B) \to ((A \to \neg\top) \vee (B \to \neg\top))$;　　3°, 引理 2.7

5° $((A \wedge B) \to \neg\top) \to \neg(A \wedge B)$;　　2°, 引理 2.5

6° $(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$;　　4°, 1°, 5°, HS

7° $((\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)) \to ((A \wedge B) \to \neg(\neg A \vee \neg B))$;　　引理 2.3 1)

8° $(A \wedge B) \to \neg(\neg A \vee \neg B)$。　　6°, 7°, MP

引理 2.9 $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$。

证明

1° $((A \wedge B) \to \neg\top) \to ((A \to \neg\top) \vee (B \to \neg\top))$;　　$L_0^*9_a$

2° $\top$ 为 $A \to (B \to (A \wedge B))$;　　L_0^*1

3° $\neg(A \wedge B) \to ((A \wedge B) \to \neg\top)$;　　2°, 引理 2.6

4° $(A \to \neg\top) \to \neg A, (B \to \neg\top) \to \neg B$;　　2°, 引理 2.6

5° $((A \to \neg\top) \vee (B \to \neg\top)) \to (\neg A \vee \neg B)$;　　4°, 引理 2.7

6° $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$;　　3°, 1°, 5°, HS

7° $(\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)) \to \neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$;　　引理 2.4

8° $\neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$。　　6°, 7°, MP

由已证明的引理、公理以及推理规则，很容易得到以下三个引理，证明从略。

引理 2.10 $((A \vee B) \to C) \to ((A \wedge B) \to C)$。

引理 2.11 $((A \vee B) \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C))$。

引理 2.12 $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$。

定理 2.1 在 $\mathcal{L}_0^*$ 系统中，$A \wedge B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$，即 $\vdash (A \wedge B) \to \neg(\neg A \vee \neg B)$ 且 $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$。

证明 由引理2.8，引理2.9直接可得。

3 系统$\mathcal{L}^*$与系统$\mathcal{L}_0^*$的关系

引理3.1 系统$\mathcal{L}_0^*$是系统$\mathcal{L}^*$的扩张。

证明 由于系统$\mathcal{L}^*$中的公理是系统$\mathcal{L}_0^*$的公理，且由定理2.1知，在系统$\mathcal{L}_0^*$中$A \wedge B$与$\neg(\neg A \vee \neg B)$可证等价，即$\mathcal{L}^*$中的$A \wedge B$是$\neg(\neg A \vee \neg B)$的简写在$\mathcal{L}_0^*$中是定理。因此系统$\mathcal{L}^*$中的定理皆为系统$\mathcal{L}_0^*$中的定理，从而系统$\mathcal{L}_0^*$是系统$\mathcal{L}^*$的扩张。

引理3.2 系统$\mathcal{L}^*$是系统$\mathcal{L}_0^*$的扩张。

证明 由参考文献[2,3]知，$\mathcal{L}_0^*$中的公理$L_0^*9_b$是$\mathcal{L}^*$中的定理，从而$\mathcal{L}_0^*$中的定理皆为$\mathcal{L}^*$中的定理，因此$\mathcal{L}^*$是$\mathcal{L}_0^*$的扩张。

定理3.1 系统$\mathcal{L}_0^*$与系统$\mathcal{L}^*$是两个等价的模糊命题演算系统。

证明 这是引理3.1，引理3.2的直接结果。

参考文献：

[1] 王国俊. 模糊命题的一种形式演绎系统[J]. 科学通报，1997, 42(10): 1041-1045
Wang G J. A kind of formal deductive system for fuzzy proposition[J]. Science Bulletin, 1997, 42(10): 1041-1045
[2] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京：科学出版社，2008
Wang G J. Non-classical Mathematical Logical and Approximation Reasoning[M]. Beijing: Science Press, 2008
[3] Wu H B. A kind of simplified formal deductive system $\mathcal{L}_0^*$ for the system $\mathcal{L}^*$[J]. Journal of Fuzzy Mathematics, 2001, 9(2): 365-371
[4] 何颖俞，王国俊. $\mathcal{L}^*$-Lindebaum代数的结构与$\mathcal{L}^*$公理系统的简化形式[J]. 工程数学学报，1998, 15(1): 1-8
He Y Y, Wang G J. On the structure of $\mathcal{L}^*$-Lindebaum algebra and a simplified system of axioms for $\mathcal{L}^*$[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1998, 15(1): 1-8
[5] 吴洪博，王晓敏，韩诚. $\mathcal{L}^*$系统中模糊演绎定理的改进形式[J]. 四川大学学报，2005, 42(1): 27-32
Wu H B, Wang X M, Han C. An improved form of fuzzy deduction theorem in the System $\mathcal{L}^*$[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science), 2005, 42(1): 27-32

A New Equivalent Form of the Fuzzy Logic System

MA Qiao-yun[1,2], WU Hong-bo[2]

(1- Department of Mathematics, Xi'an Science and Artical University, Xi'an 710065;
2- College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract: $P \wedge Q$ is the abriviation of $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ in the fuzzy logic system $\mathcal{L}^*$. The relation between the connection words $\wedge$ and $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$ should be determined by the axiom system in $\mathcal{L}^*$. In this paper, $\wedge$ has a suitable relationship with $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$ by adding axioms in $\mathcal{L}^*$. It is the main result of this paper that the system $\mathcal{L}^*$ is equivalent to the system $\mathcal{L}_0^*$ which is obtained by adding the axiom $\mathrm{L}^*9_b(((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C))$ to the system $\mathcal{L}^*$ and discarding the convention that $P \wedge Q$ is the abriviation of $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ from the system $\mathcal{L}^*$.

Keywords: fuzzy logic; propositional calculus; the system $\mathcal{L}^*$; equivalent form

Received: 28 Oct 2009. **Accepted:** 09 Apr 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10871121); the Professional and Technical Personnel of Young and Middle Aged Science Foundation of Xi'an Science and Article University (kyc200819).